

AA-1144
(049) B.Sc. (Part-I) (Maths Group)
Term End Examination, 2021-22
Mathematics
Vector Analysis and Geometry
(Paper-III)

Time : 3 hrs.]

[Maximum Marks : 50

नोट — सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से दो प्रश्न खण्डों को हल करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt all five questions. Two questions from each unit are compulsory. All questions carry equal marks.

[इकाई-I / Unit-I]

1. (क) सिद्ध कीजिए कि निम्न चार बिन्दु समतलीय हैं :

$$2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}; \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}; 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}; \hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$$

Prove that the following four points are coplaner.

$$2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}; \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}; 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}; \hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$$

(ख) बिन्दु (1, 1, 1) पर समतलों $x \log z = y^2 - 1$, $x^2y = 2 - z$ के स्पर्श तलों के मध्य का कोण ज्ञात कीजिए।Find the angle between the tangent planes to the surfaces $x \log z = y^2 - 1$, $x^2y = 2 - z$ at the point (1, 1, 1).

(ग) (i) सिद्ध कीजिए (Prove that) :

$$\text{div curl } \vec{f} = \vec{0}$$

(ii) मान ज्ञात कीजिए (Evaluate) :

$$\text{Curl } \vec{F} \text{ जहाँ/where } \vec{F} = x^2y\hat{i} - 2xz\hat{j} + 2yz\hat{k}$$

[इकाई-II / Unit-II]

2. (क) यदि $\vec{F} = (3x^2 + 6y)\hat{i} - 14yz\hat{j} + 20xz^2\hat{k}$ तब $\int \vec{F} \cdot d\vec{R}$ का मान $x = t$, $y = t^2$ तथा $z = t^3$ के अनुदिश बिन्दु (0, 0, 0) से (1, 1, 1) तक के लिए ज्ञात कीजिए।If $\vec{F} = (3x^2 + 6y)\hat{i} - 14yz\hat{j} + 20xz^2\hat{k}$, evaluate $\int \vec{F} \cdot d\vec{R}$ from (0, 0, 0) to (1, 1, 1) along the path $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.(ख) $\iint_s \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds$ का मूल्यांकन कीजिए जब $\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ तथा क्षेत्र s , $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ और $z = 3$ से परिबद्ध है।Evaluate $\iint_s \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds$ where $\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ and region s is bounded by $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ & $z = 3$.(ग) $\oint_C [(xy + y^2) dx + x^2 dy]$ के लिए समतल में ग्रीन प्रमेय का सत्यापन कीजिए जहाँ C , $y = x$ और $y = x^2$ द्वारा परिभाषित क्षेत्र की परिसीमा है।Verify Green's theorem in a plane for $\oint_C [(xy + y^2) dx + x^2 dy]$ where C is the boundary of a region bounded by $y = x$ and $y = x^2$.

(P. T. O.)

[इकाई-III / Unit-III]

3. (क) वह प्रतिबंध ज्ञात कीजिए जब द्वितीय घात का व्यापक समीकरण

$$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + C = 0$$

दो सरल रेखाएँ व्यक्त करता है।

Find the condition when the general equation of second degree

$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + C = 0$ represents a pair of straight lines.

- (ख) शांकव $14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$ का अनुरेखण कीजिए।

$$\text{Trace the conic : } 14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$$

- (ग) बिन्दु (1, 1) से गमन करने वाले शांकव $x^2 + 2y^2 = 2$ के संनाभि शांकव का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of confocal conics of conics $x^2 + 2y^2 = 2$ passing through the point (1, 1).

[इकाई-IV / Unit-IV]

4. (क) बिन्दुओं (0, -2, -4), (2, -1, -1) से होकर जाने वाले उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र सरल रेखाएँ $5y + 2z = 0$, $2x - 3y = 0$ पर स्थित हैं।

Find the equation of sphere, which is passing through the points (0, -2, -4), (2, -1, -1) and its centre is lying on straight line $5y + 2z = 0$, $2x - 3y = 0$.

- (ख) सिद्ध कीजिए कि समतल $ax + by + cz = 0$ शंकु $yz + zx + xy = 0$ को दो लंबरूप रेखाओं में प्रतिच्छेद करता है यदि

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

Prove that a plane $ax + by + cz = 0$ intersects the cone $yz + zx + xy = 0$ in two normal lines if

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

- (ग) उस लंब वृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 2 तथा अक्ष रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ रखता है।

Find the equation of circular cylinder whose radius is 2 and axis is the line $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$

[इकाई-V / Unit-V]

5. (क) दर्शाइये कि समतल $x + 2y - 2z = 4$ परवलयज $3x^2 + 4y^2 = 24z$ को स्पर्श करता है और स्पर्श बिन्दु ज्ञात कीजिए।
Show that the plane $x + 2y - 2z = 4$ touches the paraboloid $3x^2 + 4y^2 = 24z$ and find the tangent point.

- (ख) अतिपरवलयज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ के बिन्दु $(a \cos \alpha, b \sin \alpha, 0)$ से होकर जाने वाले जनकों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of generating lines of the hyperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, which pass through the point $(a \cos \alpha, b \sin \alpha, 0)$.

- (ग) सिद्ध कीजिए कि पृष्ठ $yz + zx + xy = q^2$ का समतल $lx + my + nz = p$ द्वारा प्रतिच्छेदन एक परवलय होगा यदि

$$\sqrt{l} + \sqrt{m} + \sqrt{n} = 0$$

Prove that the intersection of the surface $yz + zx + xy = q^2$ by a plane $lx + my + nz = p$ will be parabola if $\sqrt{l} + \sqrt{m} + \sqrt{n} = 0$.