No. of Printed Pages : 3 **Roll No. ....**

AA–1143

(049) B.Sc. (Part-I) (Maths Group)

Term End Examination, 2021-22

Mathematics

Calculus (Paper-II)

Time : 3 hrs.] **[Maximum Marks : 50**

नोट – *किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।*

Attempt any five questions. One question from each unit is compulsory. All questions carry equal marks.

[इकाई-1 / Unit-I]

1. (क) δ इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि :

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{2x^3+x^2-8x-4}{x-2} - 20\right| < \frac{1}{10}$$

Find δ such that :

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{2x^3+x^2-8x-4}{x-2} - 20\right| < \frac{1}{10}$$

(ख) निम्न फलन की $x = 0$ पर सांतत्य के लिए जांच कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 ax}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Test for continuity of the following function at $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 ax}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

2. (क) यदि $y = \sin(a \sin^{-1} x)$ तो दर्शाइये कि

$(1-x^2)\, y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (x^2-a^2)\, y_n = 0$ और $(y_n)_0$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $y = \sin(a \sin^{-1} x)$, then prove that $(1-x^2)\, y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (x^2-a^2)\, y_n = 0$ and find $(y_n)_0$.

(ख) टेलर प्रमेय से $\tan^{-1}x$ का $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ की घातों में प्रसार ज्ञात कीजिए।

Expand $\tan^{-1}x$ in power of $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ by Taylor's theorem.

(P. T. O.)

[इकाई-2 / Unit-II]

3. (क) वक्र $y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 + x^2 - y^2 - 1 = 0$ की अनंत स्पर्शियां ज्ञात कीजिए।

Find the asymptotes of the curve :

$y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 + x^2 - y^2 - 1 = 0$

(ख) सिद्ध कीजिए कि चक्रज (cycloid) $x = a\,(t + \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ is $\delta = 4a \cos (t/2)$

Prove that the radius of curvature at any point t of the cycloid $x = a\,(t + \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ is $\delta = 4a \cos (t/2)$

4. (क) वक्र $x^3 + a\,(y^2 - x^2) = 0$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve $x^3 + a\,(y^2 - x^2) = 0$

(ख) चक्रज (cycloid) $x = a\,(t + \sin t)$, $y = a\,(1 + \cos t)$ का अनुरेखण कीजिए।

Trade the cycloid $x = a\,(t + \sin t)$, $y = a\,(1 + \cos t)$

[इकाई-3 / Unit-III]

5. (क) यदि n कोई धन पूर्णांक हो, तो समाकलों $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

If n is any positive integer, then to find the value of the integer $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$.

(ख) एस्ट्राइड (Astroid) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ /(या $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$) का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the complete area of the astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$/(or $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$).

6. (क) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4 + 5\sin x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4 + 5\sin x}$

(ख) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ परिभ्रमण से जनित लध्वक्ष गोलाभ (oblate spheroid) का आयतन ज्ञात कीजिए।

Find the volume of oblate spheroid generated by revolving the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

[इकाई-4 / Unit-IV]

7. (क) हल कीजिए :

$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\ dx$

Solve :

$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\ dx$

(ख) हल कीजिए :

$(1 + y^2)\, dx = (\tan^{-1} y - x)\, dy$

Solve :

$$(1 + y^2)\, dx = (\tan^{-1}y - x)\, dy$$

8. (क) हल कीजिए : (Solve)

$$\frac{d^3y}{dx^3} + a^2 \frac{dy}{dx} = \sin ax$$

(ख) हल कीजिए : (Solve)

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 3y = x^2 \log x$$

[इकाई-5 / Unit-V]

9. (क) हल कीजिए : (Solve)

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - (x^2 + 2x)\frac{dy}{dx} + (x + 2)y = x^3.e^x$$

(ख) प्राचल विचरण विधि से हल कीजिए :

Solve by the method of variation of parameters :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \text{cosec } x$$

10. (क) हल कीजिए :

$$\frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t$$

$$\frac{dy}{dt} - x + 3y = e^{2t}$$

Solve :

$$\frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t$$

$$\frac{dy}{dt} - x + 3y = e^{2t}$$

(ख) हल कीजिए :

$$\frac{dx}{x(y - z)} = \frac{dy}{y(z - x)} = \frac{dz}{z(x - y)}$$

Solve :

$$\frac{dx}{x(y - z)} = \frac{dy}{y(z - x)} = \frac{dz}{z(x - y)}$$